非線形偏微分方程式の形式解、特性多角形とGevrey評価(超函数と微分方程式)

AUTHOR(S):

大内, 忠

CITATION:

大内, 忠. 非線形偏微分方程式の形式解、特性多角形とGevrey評価(超函数と微分方程式). 数理解析研究所講究録 1996, 935: 114-117

ISSUE DATE:

1996-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60016

数理解析研究所講究録
935 巻 1996 年 114-117

非線形偏微分方程式の形式解、特性多角形と Gevrey 評価

上智大学 理工
大内 忠 (Sunao ŌUCHI)

§0 記号

まず記号を述べよう。$z=(z_0,z_1,\ldots,z_n)=(z_0,z_1,z'')=(z_0,z')$ をC^{n+1} の座標とする。$|z|=\max\{|z_i|;\ 0\le i\le n\}$ $\partial=(\partial_0,\partial_1,\ldots,\partial_n)=(\partial_0,\partial')$, $\partial_i=\partial/\partial z_i$ とする。非負整数 (整数) の全体を $\boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{Z})$ で表す。多重指数 $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_0,\alpha')$ にたいして, $|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=\alpha_0+|\alpha'|$, $\partial^\alpha=\partial_0^{\alpha_0}\partial^{\alpha'}=\partial_0^{\alpha_0}\partial'^{\alpha'}=\prod_{i=1}^n\partial_i^{\alpha_i}$、$z^\alpha=z_0^{\alpha_0}z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}$ とする。多重指数の直積に関するいくつかの記号と定義を導入しよう。$A\in(\boldsymbol{N}^{n+1})^s$, ここで $A=(A_1,A_2,\ldots,A_s)$ $\quad A_i=(A_{i,0},A_i')\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^n$. $A\in(\boldsymbol{N}^{n+1})^s$ にたいして $s_A=s$, $k_A=\max\{|A_i|;1\le i\le s_A\}$, $\quad k_A'=\max\{|A_i'|;1\le i\le s_A\}$, $|A|=\sum_{i=1}^{s_A}|A_i|$, $l_A=\sum_{i=1}^{s_A}|A_i'|$ とおく。また2つの $A,B\in(\boldsymbol{N}^{n+1})^s$ について, その成分 A_i の並べ換えが B となるとき, この2つを同一視する。$\mathcal{N}^S$ で全ての異なる $\cup_{s=1}^S(\boldsymbol{N}^{n+1})^s$ の元の全体を表す。$\mathcal{O}(W)$ で W上の正則関数の全体を表す。

$\omega_0=\{z_0;|z_0|\le R\}$, $\omega=\{z'\in\boldsymbol{C}^n;\ |z'|\le R\}$, $S=\{z_0;\ \phi_-<\arg z_0<\phi_+,0<|z_0|\le r\}$ を$\boldsymbol{C}$ の sector, $\Omega=\omega_0\times\omega$, $\Omega_S=S\times\omega$ とおく。

§1 非線形作用素と特性多角形

定義 1.1. (1) $\mathcal{F}$ で $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z')z_0^{r_n}$, $f_n(z')\in\mathcal{O}(\omega),r_0<r_1<\ldots<r_n<\to+\infty$, の型の形式級数の全体を表す。ここで$\omega$ は $f(z)$ に依存してもよい。

(2) $f(z)\in\mathcal{F}$ に対して $\min\{r_n;f_n(z')\not\equiv0\}$ を $f(z)$ の形式的付値($formal\ evaluation$) という。もし全ての $f_n(z')\equiv0$, のときは形式的付値は$+\infty$ とする。

定義 1.2. (1) $f(z)\in\mathcal{O}(\Omega_S)$ とせよ。$f(z)$ が漸近展開 $f(z)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(z')z_0^{r_n}$, $f_n(z')\in\mathcal{O}(\omega),r_0<r_1<\ldots<r_n<\to+\infty$, をもつとは, 任意の $sector$ S_0 $(S_0\subset\subset S)$ と任意の Nにたいして

$$(1.1)\qquad |f(z)-\sum_{n=0}^{N-1}f_n(z')z_0^{r_n}|\le C_N|z_0|^{r_N}\quad as\ z_0\to\ in\ S_0$$

が成り立つことをいう。$Asy(\Omega_S)$ で上の意味での漸近展開をもつ $f(z)\in\mathcal{O}(\Omega_S)$ の全体を表す。

(2) $\gamma>0$ とする。$Asy_{\{\gamma\}}^0(\Omega_S)$ で

$$(1.2)\qquad |f(z)|\le C_0\exp(-c_0|z_0|^{-\gamma})\quad (c_0>0)$$

の評価をもつ $f(z)\in\mathcal{O}(\Omega_S)$ の全体を表す。

次の非線形作用素を考える：

$$(1.3)\qquad L(z,\partial^\alpha u)=\sum_{s=1}^M\sum_{\{A;\ s_A=s\}}z_0^{e_A}b_A(z)\prod_{i=1}^s\partial'^{A_i'}(z_0\partial_0)^{A_{i,0}}u,$$

ここで $b_A(z) \in Asy(\Omega_S)$. もし $b_A(z) \not\equiv 0$ ならばその形式的付値は 0 とする。
また

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(z,\partial) = \displaystyle\sum_{\{A;\ s_A=1\}} z_0^{e_A} b_A(z) \partial'^{A'_i} (z_0\partial_0)^{A_{i,0}}, \\ M(z,\partial^\alpha u) = L(z,\partial^\alpha u) - \mathcal{L}(z,\partial)u \end{cases}$$

とする。$\mathcal{L}(z,\partial)$ は $L(z,\partial^\alpha u)$ の線形部分であり, またこれを以下の様に書く。

$$(1.5) \qquad \mathcal{L}(z,\partial) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k} z_0^{e(k,l)} b_{k,l}(z,\partial')(z_0\partial_0)^{k-l},$$

ここで $b_{k,l}(z,\xi')$ は ξ' に関して l 次の斉次部分。

非線形作用素に対して特性多角形を定義しよう。線形作用素に対しては既に定義され, それが有用であることは知られている。以下の数を定義する：

$$(1.6) \qquad \begin{cases} e_{k,\mathcal{L}} = \min\{e(k,l);\ 0 \le l \le k\} \\ l_{k,\mathcal{L}} = \max\{l; e(k,l) = e_{k,\mathcal{L}}\}. \end{cases}$$

$r \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$(1.7) \qquad e_{k,L}(r) = \min\{s_A r + e_A; A \in \mathcal{N}^M \ with\ k_A = k\}$$

とおく。$\Pi(a,b) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; x \le a,\ y \ge b\}$ とし, $\Sigma^*_{\mathcal{L}} = the\ convex\ hull\ of$ $\{\cup_{k=0}^m \Pi(k, e_{k,\mathcal{L}})\}$, $\Sigma^*_L(r) = the\ convex\ hull\ of \{\cup_{k=0}^m \Pi(k, e_{k,L}(r))\}$ とおく。$\Sigma^*_{\mathcal{L}}$ ($\Sigma^*_L(r)$) の境界は垂直な半直線 $\Sigma^*_{0,\mathcal{L}}$ (*resp.* $\Sigma^*_{0,L}(r)$), 水平な半直線 $\Sigma^*_{p,\mathcal{L}}$ (*resp.* $\Sigma^*_{p_r,L}(r)$) および線分$\Sigma^*_{i,\mathcal{L}}$, $1 \le i \le p-1$ (*resp.* $\Sigma^*_{i,L}(r)$, $1 \le i \le p_r - 1$) からなる。$\Sigma^*_{\mathcal{L}}$ ($\Sigma^*_L(r)$) の頂点の集合は p (*resp.* p_r) 個の点 $(k_{i,\mathcal{L}}, e_{k_{i,\mathcal{L}}})$, $0 \le k_{p-1,\mathcal{L}} < k_{p-2,\mathcal{L}} < \ldots < k_{1,\mathcal{L}} < k_{0,\mathcal{L}} = m$ (*resp.* $(k_{i,L}(r), e_{k_{i,L}}(r))$, $0 \le k_{p_r-1,L}(r) < k_{p_r-2,L}(r) < \ldots < k_{1,L}(r) < k_{0,L}(r) = m$) からなる。(Figure 1 を参照)。$\gamma_{i,\mathcal{L}}$ ($\gamma_{i,L}(r)$) で$\Sigma_{i,\mathcal{L}}$ (*resp.* $\Sigma_{i,L}(r)$) の傾きを表し, $0 = \gamma_{p,\mathcal{L}} < \gamma_{p-1,\mathcal{L}} < \ldots < \gamma_{1,\mathcal{L}} < \gamma_{0,\mathcal{L}} = +\infty$ (*resp.* $0 = \gamma_{p_r,L}(r) < \gamma_{p_r-1,L}(r) < \ldots < \gamma_{1,L}(r) < \gamma_{0,L}(r) = +\infty$) とする。

次の作用素を定義する。$1 \le i \le p$ にたいして

$$(1.8) \qquad \mathcal{L}_i(z,\partial) = \sum_{\left\{\substack{(k,l);\ e(k,l) = e_{k,\mathcal{L}} \\ e_{k_{i-1},\mathcal{L}} - e_{k,\mathcal{L}} = \gamma_{i,\mathcal{L}}(k_{i-1} - k)}\right\}} z^{e(k,l)} b_{k,l}(z,\partial')(z_0\partial_0)^{k-l}.$$

これらは、線分 $\Sigma^*_{i,\mathcal{L}}$ に対応する作用素である。

定義 1.3. $\Sigma^*_{\mathcal{L}}$ を線形作用素$\mathcal{L}(z,\partial)$ の特性多角形 (*characteristic polygon*) と呼ぶ。$\Sigma^*_L(r)$ を 付値 r にたいする $L(z,\partial^\alpha u)$ の特性多角形, 簡単に r-特性多角形 ($r-$ *characteristic polygon*) と呼ぶ。

定義より線形作用素$\mathcal{L}(z,\partial)$ の *r-characteristic polygon* $\Sigma^*_{\mathcal{L}}(r)$ は$\Sigma^*_{\mathcal{L}} + (0,r)$ となる。

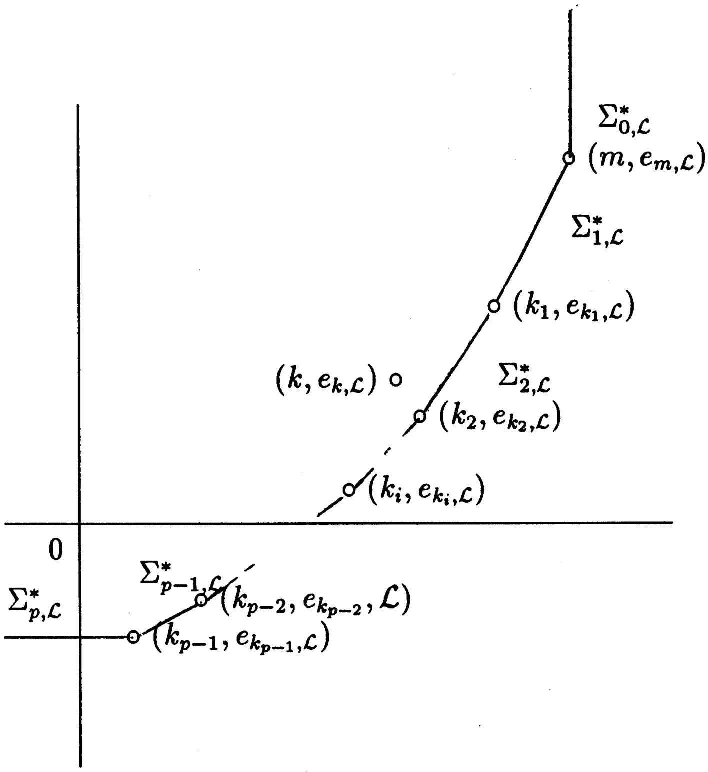

FIGURE 1. 特性多角形 (Characteristic polygon)

定義 1.4. もし $M(z,\partial^\alpha u)$ ($L(z,\partial^\alpha u)$ の非線形部分, (1.4) 参照) の *r-characteristic polygon* $\Sigma^*_M(r)$ が 線形部分 $\mathcal{L}(z,\partial)$ の *r-characteristic polygon* の内点の集合に含まれるとき、非線形作用素 $L(z,\partial^\alpha u)$ は "付値 r にかんして強線形" であるという。

§2 関数空間 $Asy^{\,0}_{\{\gamma\}}$ における存在定理

前節で定義した概念を用いて, 表題にある定理を与えよう。そのための条件をのべよう。

条件0. ある r が存在して $L(z,\partial^\alpha u)$ は付値 r にかんして強線形である。

条件1-$\{i\}$. $\mathcal{L}_i(z,\partial)$ にたいして次のことがなりたつ:

$$\begin{cases} (1) \quad l_{k_{i-1},\mathcal{L}} > l_{k,\mathcal{L}} \ for \ k \in \{k;\ k < k_{i-1}, e_{k_{i-1},\mathcal{L}} - e_{k,\mathcal{L}} = \gamma_{i,\mathcal{L}}(k_{i-1} - k)\}, \\ (2) \quad b_{k_{i-1}, l_{k_{i-1}},\mathcal{L}}(0,\xi') \not\equiv 0. \end{cases}$$

つぎの方程式を考える。

$$L(z,\partial^\alpha u) = f(z) \in Asy^{\,0}_{\{\gamma_1\}}(\Omega_S). \tag{2.1}$$

ここで $S = \{z_0;\ \phi_- < \arg z_0 < \phi_+, 0 < |z_0| \le r\}$。

定理 2.1. 条件0と条件$1-\{1\}$が成り立つとする。$S'=\{z_0;\ \phi'_-<\arg z_0<\phi'_+,\ 0<|z_0|\le r'\}$とする。ここで$\phi_-<\phi'_-<\phi'_+<\phi_+,\ \phi'_+-\phi'_-<\pi/\gamma_1$とする。このとき$r'>0$と$z=0$の近傍 Ω'が存在して(2.1)の解$u_{S'}(z)\in Asy^0_{\{\gamma_1\}}(\Omega'_{S'})$が存在する。

上の存在定理は条件$1-\{i\}$を仮定することによりさらに拡張できる。詳しくは[5]参照。

§3 形式解と真の解

前節の定理は次の問題への応用を目指している。$P(z,\partial^\alpha u)=0$を非線形偏微分方程式とする。この方程式にたいしては[2],[3]において収束する級数解(整級数とはかぎらない)の存在が示されている。また[4]においては*Gevrey*評価をもつ形式級数解(整級数とはかぎらない)の存在が、[1]においてはあるクラスの非線形方程式にたいして, 多変数の*Gevrey*評価をもつ形式整級数解の存在が示されている。問題はこれらの形式解にたいして、真の解がある角領域で存在するか? ということである。この答えとして§2の定理、更にはそれを精密にしたものを使うことにより、ある条件のもとで形式解と真の解の対応がつくことを示すことが出来る([5])。このことは他の機会に述べたい。

References

[1] R. Gérard et H. Tahara, *Théorème du type Maillet pour une classe d'équations aux dérivées patielles analytiques singulières*, C.N.R.S. t.312, p.499-502 (1991)

[2] T. Ishii, *On propagation of regular singularities for solutions of nonlinear partial differential equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 37, p.377-424 (1990).

[3] E. Leichtnam, *Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 20, p.137-170 (1987).

[4] S. Ōuchi, *Formal solutions with Gevrey type estimates of nonlinear partial differential equations*, Preprint.

[5] S. Ōuchi, *Genunine sollutions and formal solutions with Gevrey type estimates of nonlinear partial differential equations*, in preparation.